CLASS Bologna

Analisi Matematica @ Class

Relazioni Funzioni

Lezione 2

23 settembre 2014

professor Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Funzioni

Definizione

Una relazione $\mathcal{F}$ in $X \times Y$ è detta **funzione** se per ogni $x \in X$ esiste un solo $y \in Y$ tale che $\boldsymbol{x\mathfrak{F}y}$**.**

Funzioni

Definizione

Una relazione $\mathfrak{F}$ in $X \times Y$ è detta **funzione** se per ogni $x \in X$ esiste un solo $y \in Y$ tale che $\boldsymbol{x \mathfrak{F} y}$.

In sostanza **funzione** è un oggetto composto da tre parti: un insieme X (dominio), un insieme Y (codominio) e una **legge** f che associa all'elemento $x \in X$ un ben determinato elemento $y \in Y$.

Funzioni

Definizione

Una relazione $\mathfrak{F}$ in $X \times Y$ è detta **funzione** se per ogni $x \in X$ esiste un solo $y \in Y$ tale che $\boldsymbol{x\mathfrak{F}y}$.

In sostanza **funzione** è un oggetto composto da tre parti: un insieme X (dominio), un insieme Y (codominio) e una **legge** f che associa all'elemento $x \in X$ un ben determinato elemento $y \in Y$.

L'elemento y associato a x per il tramite di f si dice **immagine** di x e si indica con $y = f(x)$.

Useremo la rappresentazione simbolica

$$\boldsymbol{f : X \to Y}$$

per indicare che stiamo considerando una funzione f di dominio X e codominio Y

Useremo la rappresentazione simbolica

$$\boldsymbol{f : X \to Y}$$

per indicare che stiamo considerando una funzione f di dominio X e codominio Y

Definizione

La funzione $f : X \to Y$ si dice

suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$

Useremo la rappresentazione simbolica

$$\boldsymbol{f : X \to Y}$$

per indicare che stiamo considerando una funzione f di dominio X e codominio Y

Definizione

La funzione $f : X \to Y$ si dice

suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$

iniettiva quando ogni elemento di Y è immagine al più di un elemento di X

Definizione

Data $f : X \to Y$ e dato $S \subset X$ si dice **immagine di $\boldsymbol{S}$ secondo $\boldsymbol{f}$** il sottoinsieme di Y definito da

$$\boldsymbol{f(S) = \{y \in Y : \exists\, x \in S} \text{ con } \boldsymbol{f(x) = y\}}$$

Definizione

Data $f : X \to Y$ e dato $S \subset X$ si dice **immagine di $\boldsymbol{S}$ secondo $\boldsymbol{f}$** il sottoinsieme di Y definito da

$$\boldsymbol{f(S) = \{y \in Y : \exists\, x \in S \text{ con } f(x) = y\}}$$

In particolare se $S = X$, $f(X)$ si dice immagine di f e si indica con $\mathbf{Im}(\boldsymbol{f})$

Definizione

Data $f : X \to Y$ e dato $I \subset Y$ si dice **controimmagine di $\boldsymbol{I}$ secondo $\boldsymbol{f}$** il sottoinsieme di X definito da

$$\boldsymbol{f^{-1}(I) = \{x \in X : \exists\, f(x) \in I\}}$$

Teorema

Se $f : X \xrightarrow[\text{su}]{1-1} Y$ è biettiva allora esiste $g : Y \to X$ tale che

(i) $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$

(ii) $f(g(y)) = y$ per ogni $y \in Y$

Definizione

Se $f : X \to Y$ il **grafico** di f è il sottoinsieme di $X \times Y$:

$$\boldsymbol{\mathcal{G} = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.}$$

Definizione

Se $f : X \to Y$ il **grafico** di f è il sottoinsieme di $X \times Y$:

$$\boldsymbol{\mathcal{G} = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.}$$

Proprietà del grafico $\mathcal{G}$:

(i) per ogni $x \in X$ esiste $y \in Y$ tale che $(x, y) \in \mathcal{G}$

(ii) se (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathcal{G}$ ed è $x_1 = x_2$ allora deve essere anche $y_1 = y_2$

Equivalenze. Una relazione $\mathcal{R}$ su X si dice **equivalenza** in X se soddisfa le tre seguenti proprietà:

a) per ogni $x \in X, \quad x\mathcal{R}x$

b) se $x\mathcal{R}y$ allora $y\mathcal{R}x$

c) se $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$ allora $x\mathcal{R}z$

Una equivalenza in X ripartisce l'insieme X in classi di equivalenza: per ogni $x \in X$ consideriamo l'insieme di tutti gli elementi equivalenti all'elemento x che indichiamo con $[x] = \{y \in X : y\mathcal{R}x\}$. L'insieme $[x]$ viene chiamato classe di equivalenza dell'elemento x. Siccome per la proprietà (a) è $x \in [x]$ l'insieme X è l'unione di tutte le classi di equivalenza. Si verifica che presi x, $y \in X$ le due classi di equivalenza $[x]$ e $[y]$ o sono disgiunte $[x] \cap [y] = \emptyset$ o sono coincidenti $[x] = [y]$.

Ordini parziali. Una relazione binaria $\prec$ su X si dice **ordine parziale** se soddisfa le due seguenti proprietà:

a) è transitiva: se $x \prec y$ e $y \prec z$ allora $x \prec z$

Ordini parziali. Una relazione binaria $\prec$ su X si dice **ordine parziale** se soddisfa le due seguenti proprietà:

a) è transitiva: se $x \prec y$ e $y \prec z$ allora $x \prec z$

b) è antisimmetrica: per ogni $x, y \in X, \quad x \prec y \implies y \not\prec x$

Ordini parziali. Una relazione binaria $\prec$ su X si dice **ordine parziale** se soddisfa le due seguenti proprietà:

a) è transitiva: se $x \prec y$ e $y \prec z$ allora $x \prec z$

b) è antisimmetrica: per ogni $x, y \in X$, $\quad x \prec y \implies y \not\prec x$

Una relazione $\prec$ su X è detta *ordine totale* se essa è un ordine parziale e soddisfa la *proprietà di tricotomia*

(c) per ogni $x, y \in X$ vale una sola delle tre:

$$x \prec y, \quad x = y, \quad y \prec x$$

Esercizio Consideriamo la relazione $\equiv$ in $\mathbb{Z}$

$$a \equiv b \iff a - b = 2n$$

per un certo $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $\equiv$ è una equivalenza e che l'insieme $\mathbb{Z}_{|\equiv}$ ha due elementi.

Esercizio Consideriamo la relazione $\equiv$ in $\mathbb{Z}$

$$a \equiv b \iff a - b = 2n$$

per un certo $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $\equiv$ è una equivalenza e che l'insieme $\mathbb{Z}_{|\equiv}$ ha due elementi.

Dimostrare che $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 - n + 1$ è iniettiva ma non suriettiva

Esercizio Consideriamo la relazione $\equiv$ in $\mathbb{Z}$

$$a \equiv b \iff a - b = 2n$$

per un certo $n \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $\equiv$ è una equivalenza e che l'insieme $\mathbb{Z}_{|\equiv}$ ha due elementi.

Dimostrare che $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n^2 - n + 1$ è iniettiva ma non suriettiva

Dimostrare che $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(n) = 3n + 1$ è iniettiva e suriettiva

Data la funzione $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definita da

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

dimostrare che:

a) f è iniettiva

b) f non è suriettiva